马克思主义理论研究
和建设工程重点教材

逻辑学

（第二版）

《逻辑学》编写组

高等教育出版社

马克思主义理论研究
和建设工程重点教材

逻辑学

（第二版）

《逻辑学》编写组
主　编　何向东
副主编　张建军　任晓明
主要成员
（以姓氏笔画为序）
王　静　王克喜　杜国平
李　娜　张晓芒　胡泽洪
郭美云　蔡曙山　熊立文

高等教育出版社·北京

图书在版编目(CIP)数据

逻辑学 /《逻辑学》编写组编. -- 2 版. -- 北京：高等教育出版社,2018.8

马克思主义理论研究和建设工程重点教材

ISBN 978-7-04-050089-9

Ⅰ.①逻… Ⅱ.①逻… Ⅲ.①逻辑学-高等学校-教材 Ⅳ.①B81

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 164839 号

责任编辑 李 喆　　封面设计 王 鹏　　版式设计 于 婕

责任校对 窦丽娜　　责任印制 耿 轩

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京鑫海金澳胶印有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	21.25	版　次	2017 年 7 月第 1 版
字　数	400 千字		2018 年 8 月第 2 版
购书热线	010-58581118	印　次	2018 年 8 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	45.10 元

物 料 号　50089-00

目　录

（8）张三晚上要么去踢足球，要么去看电影。

上述命题都有其他简单句作为它们的组成部分，通过联结词形成整个命题。比如命题（5）是由“所有天鹅都是白的”和联结词“并非”构成的。命题（6）是通过“只要……就……”联结两个简单命题组成的。命题（7）是由“虽然……但是……”联结两个命题组成的。命题（8）是由“要么……要么……”联结两个简单命题组成的。

在复合命题中，起联结作用的词称为命题联结词（或者称为句子联结词）。比如“不”“只要……就……”“虽然……但是……”“要么……要么……”，等等。命题联结词的作用是从较为简单的命题构造更复杂的命题，它们也称为命题函数（或者称为句子函数），即在联结词的空位上补充命题而得到复合命题的函数。

三、推理

推理由命题构成。一个推理是从一些命题推出另一个命题的过程。比如，考虑下面这个推理：

> 要么士兵拿破仑想当将军，要么士兵拿破仑不想当将军。如果他想当将军，那么他不是好士兵。如果他不想当将军，那么他也不是好士兵。所以，士兵拿破仑不是好士兵。

整个推理由两部分命题组成，“所以”之前是一部分，一般称为这个推理的前提，“所以”之后是另一部分，一般称为这个推理的结论。一个推理就是从一些前提推出结论的过程。我们用 B_1，B_2，…，B_n表示前提，用 A 表示结论，推理的一般形式写成：

$$B_1, B_2, \cdots, B_n \vdash A$$

其中“$\vdash$”表示“所以”，即从前提推出结论。

有些推理是正确的，有些推理是不正确的。正确的推理称为有效推理，不正确的推理称为无效推理。我们凭借直觉可以判断上面给出的推理是有效推理。下面我们再看两个例子：

（1）如果 a 是自然数，那么 a 是整数。a 不是整数。所以，a 不是自然数。

（2）如果 a 是自然数，那么 a 是整数。a 不是自然数。所以，a 不是整数。

在上述两个推理中，推理（1）是有效的，而推理（2）不是有效的，因为“a

是自然数”是“a 是整数”的充分条件，否定前者不能否定后者。

一般地说，一个推理“B_1，B_2，…，$B_n \vdash A$”是有效的当且仅当如下条件成立：在任何情况下，如果前提 B_1，B_2，…，B_n中每个命题都是真的，那么结论 A 是真的。也就是说，推理的有效性可以定义为前提真蕴涵结论真。判断一个推理是否有效，并不是要确定其中每个命题的真假，而是假定前提都是真的，看能否必然推出结论也是真的。如果在某种情况下，前提都是真的而结论是假的，那么这个推理就不是有效的。比如，上述推理（2）不是有效的，令 a=-1，那么 a 不是自然数，因此前提都是真的，但结论是假的，-1 是整数。推理（1）是有效的，因为前提中“a 不是整数”意味着“并非 a 是整数”。由此可以推出“a 不是自然数”。

上述推理（1）是有效的，而且所有与它相同形式的推理都是有效的。比如考虑下面的推理：

（3）如果今天空气湿度达到临界条件，今天就会下雨。今天没有下雨。所以，今天空气湿度没有达到临界条件。

与推理（1）相比，它们有如下共同的形式：

（＊）如果 p，那么 q。并非 q。所以，并非 p。

其中 p 和 q 表示任何简单命题。所有具有这种形式的推理都是有效的。由此可以看出，推理的有效性只取决于推理形式。在命题逻辑中，推理形式是通过命题联结词表现出来的。下一节我们将考虑各种运用命题联结词的推理。

第二节 复合命题及其推理

复合命题是从简单命题出发运用命题联结词构造起来的。在命题逻辑中，我们考虑的命题联结词主要有五个：“并非”“并且”“或者”“如果……那么……”“……当且仅当……”为了方便起见，我们运用一些符号来书写这五个联结词：

联结词	并非	并且	或者	如果……那么……	……当且仅当……
符号	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
术语	否定	合取	析取	蕴涵	等值
命题形式	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$

上述联结词对应的符号都有相应的逻辑术语，所形成的复合命题依次读作

"否定命题"、"合取命题"、"析取命题"、"蕴涵命题"（或者称为"条件命题"）、"等值命题"。

为了更加明确一个命题的结构或形式，即它是如何由简单命题构造起来的，现代逻辑引入一套符号来表示。在现代逻辑中，命题也叫"公式"。我们用符号 p_0，p_1，p_2，…表示简单命题，也称为命题变元。我们用 p、q、r、s 等小写英文字母表示任意命题变元。每个公式都是从命题变元按如下规则形成的：

（1）任何命题变元 p 是公式。

（2）如果 A 是公式，那么$\neg A$ 是公式。

（3）如果 A 和 B 是公式，那么 $(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$都是公式。

（4）只有按上述三条规则形成的表达式才是公式。

形成规则（2）和（3）所得到的公式就是复合命题。规则（4）是一条限制性规则，也就是说，如果一个表达式不是按前面三条规则得到的，那么它就不是公式。例如，$\neg q) \wedge$ 这个表达式就不是公式，它不是按规则得到的。在规则中，如果运用联结词$\wedge$，那么它的两边一定还有公式。

前面讲到的五种复合命题形式中，A 和 B 中还可能出现其他复合命题。因此，我们把$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$分别称为公式$\neg A$、$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$等五个公式的主联结词。比如：

如果 a 大于 2 并且 a 是偶数，那么 a 大于 4。

这个命题的主联结词是"如果……那么……"。我们用 p 表示"a 大于 2"，q 表示"a 是偶数"，r 表示"a 大于 4"。这个命题就写成"$(p \wedge q) \rightarrow r$"。

公式中括号的使用是为了消除歧义。比如$\neg p \rightarrow q \wedge p \rightarrow q$ 这个命题是有歧义的，这样书写无法判断它的主联结词，也无法判断它指什么样的命题。但是，如果加上括号则不同，比如 $((\neg p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ 的主联结词是蕴涵词，蕴涵词的左边是合取命题，它由蕴涵命题$\neg p \rightarrow q$ 和简单命题 p 组成。再如 $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$ 的主联结词是合取词，合取词的左边是蕴涵命题$\neg p \rightarrow q$，右边是蕴涵命题 $p \rightarrow q$。

简单命题要么是真的，要么是假的。比如"3 大于 2"是真的，"太阳围绕地球转"是假的。复合命题的真假与其中所包含的简单命题的真假有密切关系，它是由其中所包含的简单命题的真假和其中使用的命题联结词的意义决定的。上述五个命题联结词的意义就在于它们通过简单命题的真假决定所构成的复合命题的

真假。下面我们运用命题联结词的真值表对上述五个命题联结词的意义依次进行分析。

一、命题联结词的真值表

(一) 否定词

通过否定词“并非”(符号:¬)联结一个命题所形成的复合命题称为否定命题。否定命题的一般形式使用符号表示为“¬A”,读作“并非A”。它是通过否定命题A得到的复合命题。否定词的意义如下:如果A是真的,那么¬A是假的;反之,如果A是假的,那么¬A是真的。比如:“并非雪是白的”这个命题是“雪是白的”这个命题的否定命题。因为“雪是白的”是真的,所以“并非雪是白的”是假的。在逻辑学中,我们用“T”表示“真”,“F”表示假。将上述真假情况用下面的表格来表示,称为否定词的真值表:

A	¬A
T	F
F	T

真值表形象地反映了联结词的意义,即它如何从所联结的命题的真假得到整个复合命题的真假。

在日常语言中,表达否定的联结词有许多,比如“不”“没有”“不会”,等等。比如:“雪不是白的”与“并非雪是白的”表达相同的否定命题,“中国人民不会屈服”与“并非中国人民会屈服”表达相同的否定命题。

(二) 合取词

通过合取词“并且”(符号:∧)联结两个命题所形成的复合命题称为合取命题。合取命题的一般形式使用符号表示为A∧B,读作“A合取B”,或者读作“A并且B”。它是通过合取词联结两个命题A和B得到的,这两个命题都称为该合取命题的合取支,或者称为支命题。合取词的意义如下:“A并且B”是真的当且仅当A和B都是真的。只要A和B中有一个是假的,那么它们的合取命题“A并且B”就是假的。只有A和B都是真的,“A并且B”才是真的。比如:“2是偶数并且2是质数”这个命题是真的,因为它的两个支命题都是真的。然而,“2是偶数并且2是奇数”这个命题是假的,因为其中有一个支命题(2是奇数)是假的。

为了得出合取词的真值表,我们考虑两个命题A和B的真值组合,总共有四种真值组合情况:A真B真;A真B假;A假B真;A假B假。通过合取词形成的复合命题在四种情况下的真值情况如下表:

A	B	A∧B
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

从上述真值表看出，只有在第一行 A 和 B 都真的情况下，合取命题才是真的。其他情况下两个支命题中都至少有一个是假的，所以合取命题是假的。更一般地说，对任意 n 个命题的合取命题，只要其中有一个是假的，那么整个合取命题就是假的。只有 n 个命题都真，它们的合取命题才是真的。

在日常语言中，表达合取的词有许多。比如“虽然……但是……”“既……又……”“一边……一边……”，等等。日常语言中的合取词可能表达除真假之外的其他涵义，比如“虽然……但是……”表示转折，但这与逻辑无关，像语气这样的东西不是逻辑学考虑的范围。如果“虽然 A 但是 B”是真的，那么 A 和 B 都是真的。自然语言中有时候不出现合取词也表达合取的意思。比如“他们结了婚，还生了孩子”，“399 不是偶数，而是奇数”，“张三会唱歌跳舞”，等等。

（三）析取词

通过析取词“或者”（符号：∨）联结两个命题所形成的复合命题称为析取命题。析取命题的一般形式使用符号表示为 A∨B，读作“A 析取 B”，也读作“A 或者 B”。它是通过析取词联结两个命题 A 和 B 得到的，这两个命题都称为该析取命题的析取支，或者称为支命题。析取词的意义如下：“A 或者 B”是真的当且仅当 A 是真的，或者 B 是真的。只要 A 和 B 中有一个是真的，那么它们的析取命题“A 或者 B”就是真的。只有 A 和 B 都是假的，“A 或者 B”才是假的。比如：“2 是偶数或者 2 是奇数”这个命题是真的，因为它有一个支命题是真的。然而，“3 是偶数或者 2 是奇数”这个命题是假的，因为两个支命题都是假的。析取词的真值表如下：

A	B	A∨B
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

从上述真值表看出，只有在第四行 A 和 B 都假的情况下，析取命题“A∨B”才是假的。其他情况下两个支命题中至少有一个真，所以析取命题是真的。

在日常语言中，表达析取的词有许多。比如“要么……要么……”“……或……”，等等。比如“张三 10 点要么去踢球，要么去听讲座”，“人固有一死，或重于泰山，或轻于鸿毛”。当然，“A 或者 B”真只要求两个析取支中有一个是真的。有时候析取命题还有这样的涵义：两个支命题至少有一个是真的，但二者不能同时是真的。这样的析取命题称为不相容析取命题。比如上面的句子“张三 10 点要么去踢球，要么去听讲座”的两个支命题中只能有一个是真的，它们不可能同时是真的。本书只考虑一种情况，整个析取命题是真的当且仅当有一个析取支是真的。

（四）蕴涵词

通过蕴涵词“如果……那么……”（符号：→）联结两个命题所形成的复合命题称为蕴涵命题。蕴涵命题的一般形式使用符号表示为 A→B，读作“A 蕴涵 B”，也读作“如果 A，那么 B”，还可以读作“A 是 B 的充分条件”。它是通过蕴涵词联结两个命题 A 和 B 得到的。蕴涵命题“A→B”也称为条件命题，其中 A 称为该条件命题的前件，B 称为它的后件。蕴涵词的意义如下：“A 蕴涵 B”是真的当且仅当 A 是假的或 B 是真的。条件命题 A→B 只排除了一种情况，即 A 是真的但 B 是假的。也就是说，只有在 A 真并且 B 假的情况下，条件命题 A→B 才是假的。在其他情况下它都是真的。蕴涵词的真值表如下：

A	B	A→B
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

从上述真值表看出，只有在第二行 A 真而 B 假的情况下，条件命题 A→B 才是假的。其他情况下它都是真的。在数学中，条件命题 A→B 的涵义可以理解为：前件 A 是后件 B 的充分条件，意思是说：如果命题 A 是真的，则必定可以得出命题 B 是真的。它仅仅否定了前件 A 真而后件 B 假的情况。其他情况下，即在 B 真的情况或 A 假的情况下，整个条件命题都是真的。因此，A→B 是真的当且仅当 A 是假的或者 B 是真的。

在日常语言中，表达蕴涵或条件的词有许多。比如“若……则……”“只要……就……”，等等。此外，在数学和日常生活中，人们还常常谈到必要条件。必要条件的表达形式是“只有……才……”。比如：“只有搞好改革，才能促进发展。”这个句子的意思是：搞好改革是促进发展的必要条件。这就是说，如果促进了发展，则必定搞好了改革。如果不搞好改革，就无法促进发展。因此，我们可以运用蕴涵命题来表达必要条件。用 p 表示“搞好改革”，q 表示“促进发展”。

上述句子可以写成：

$$q \rightarrow p$$

必要条件的涵义是：如果 p 是假的，那么 q 是假的。这等价于说，如果 q 是真的，那么 p 是真的。充分条件和必要条件的关系是很显然的。如果 A 是 B 的充分条件，那么 B 是 A 的必要条件。反过来，如果 A 是 B 的必要条件，那么 B 是 A 的充分条件。

（五）等值词

通过等值词“……当且仅当……”（符号：↔）联结两个命题所形成的复合命题称为等值命题。等值命题的一般形式使用符号表示为 $A \leftrightarrow B$，读作“A 等值于 B”，也读作“A 当且仅当 B”，还可以读作“A 是 B 的充分必要条件”。它是通过等值词联结两个命题 A 和 B 得到的。等值词的意义如下：“A 当且仅当 B”是真的当且仅当 A 与 B 的真值相同，即要么 A 和 B 同时是真的，要么 A 和 B 同时是假的。等值命题 $A \leftrightarrow B$ 排除 A 和 B 真值不相等的情况。等值词的真值表如下：

A	B	$A \leftrightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

从上述真值表看出，只有在第一行和第四行 A 和 B 的真值相同的情况下，等值命题 $A \leftrightarrow B$ 才是真的。在其他情况下它都是假的。在数学中，充分必要条件命题 $A \leftrightarrow B$ 的涵义是：A 是 B 的充分条件并且 A 是 B 的必要条件。也就是说，A 是 B 的充分条件并且 B 是 A 的充分条件。因此，$A \leftrightarrow B$ 与 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 意义相同。

在自然语言中，人们使用“当且仅当”表示等值。比如在几何中，“一个三角形是等边三角形当且仅当它是等角三角形”是等值命题。

二、复合命题推理

逻辑学研究有效的推理形式。有效推理的基本涵义是从假定前提真必然得出结论真。利用命题联结词的真值表，可以得到许多关于使用命题联结词的有效推理形式。下面我们依次看五类复合命题所涉及的有效推理形式。

（一）否定命题及其推理

否定命题的基本形式是 $\neg A$，根据否定词的真值表可得：假设 A 是真的。那么

$\neg A$ 是假的。所以 A 的双重否定命题$\neg\neg A$ 是真的。反之，假设$\neg\neg A$ 是真的。那么$\neg A$ 是假的。所以 A 是真的。由此证明：A 是真的当且仅当$\neg\neg A$ 是真的。由此可以得到如下两种关于否定命题的有效推理形式：

（1）否定引入推理：$A \vdash \neg\neg A$

（2）否定消去推理：$\neg\neg A \vdash A$

例如，从“雪是白的”可以推出“并非雪不是白的”。从“并非雪不是白的”可以推出“雪是白的”。

（二）合取命题及其推理

合取命题的基本形式是 $A \wedge B$，根据合取词的真值表可得：假定$A \wedge B$是真的，那么 A 是真的，并且 B 是真的。反之，假设两个命题 A 和 B 都是真的，那么它们的合取命题 $A \wedge B$ 也是真的。所以，$A \wedge B$ 是真的当且仅当 A 是真的并且 B 是真的。由此可以得到如下两种关于合取命题的有效推理形式：

（1）合取引入推理：$A, B \vdash A \wedge B$

（2）合取消去推理：$A \wedge B \vdash A$；$A \wedge B \vdash B$

在合取引入推理中，从 A 和 B 两个前提可以推出结论 $A \wedge B$，这个推理是有效的。合取消去推理有两条，从前提 $A \wedge B$ 既可推出结论 A，又可推出结论 B。

合取引入推理的例子如下：

（1）亚里士多德是哲学家。亚里士多是逻辑学家。所以，亚里士多德既是哲学家又是逻辑学家。

合取消去推理的例子如下：

（2）亚里士多德既是哲学家又是逻辑学家。所以，亚里士多德是哲学家。

（3）亚里士多德既是哲学家又是逻辑学家。所以，亚里士多德是逻辑学家。

（三）析取命题及其推理

析取命题的基本形式是 $A \vee B$，根据析取词的真值表，$A \vee B$ 是真的当且仅当 A 是真的或者 B 是真的。由此可得如下四条：

（1）假设 A 是真的，那么析取命题 $A\vee B$ 是真的。
（2）假设 B 是真的，那么析取命题 $A\vee B$ 是真的。
（3）假定 $A\vee B$ 是真的，而 A 是假的，那么 B 是真的。
（4）假定 $A\vee B$ 是真的，而 B 是假的，那么 A 是真的。

根据有效推理的涵义，可得如下两种关于析取命题的有效推理形式：

（1）析取引入推理：$A\vdash A\vee B$；$B\vdash A\vee B$
（2）析取消去推理：$A\vee B, \neg A\vdash B$；$A\vee B, \neg B\vdash A$

析取引入推理有两条：从 A 可以推出结论 $A\vee B$，从 B 可以推出结论 $A\vee B$。反之，析取消去推理也有两条：从 $A\vee B$ 和 $\neg A$ 两个前提可以推出结论 B，从 $A\vee B$ 和 $\neg B$ 两个前提可以推出结论 A。

析取引入推理的例子如下：

（1）张三很勤奋。所以，张三很勤奋或者他很笨。
（2）张三很笨。所以，张三很勤奋或者他很笨。

析取消去推理的例子如下：

（3）张三很勤奋或者他很笨。张三不勤奋。所以，他很笨。
（4）张三很勤奋或者他很笨。张三不笨。所以，他很勤奋。

（四）条件命题及其推理

条件命题的基本形式是 $A\rightarrow B$，根据析取词的真值表，$A\rightarrow B$ 是真的当且仅当 A 是假的或者 B 是真的。由此可得如下四条：

（1）假定 B 是真的。那么 $A\rightarrow B$ 是真的。
（2）假定 A 是假的。那么 $A\rightarrow B$ 是真的。
（3）假定 $A\rightarrow B$ 是真的并且 A 是真的。那么 B 是真的。
（4）假定 $A\rightarrow B$ 是真的并且 B 是假的。那么 A 是假的。

根据有效推理的涵义，可得如下两种关于条件命题的有效推理形式：

（1）条件引入推理：$B \vdash A \to B$；$\neg A \vdash A \to B$

（2）条件消去推理：$A \to B$，$A \vdash B$；$A \to B$，$\neg B \vdash \neg A$

条件引入推理有两条：（i）从 B 可以推出结论 $A \to B$，（ii）从$\neg A$ 可以推出结论 $A \to B$。推理（i）意思是真命题被任何命题蕴涵；推理（ii）意思是假命题蕴涵任何命题。反之，条件消去推理也有两条：（iii）从$A \to B$ 和 A 两个前提可以推出结论 B，（iv）从 $A \to B$ 和$\neg B$ 两个前提可以推出结论$\neg A$。推理（iii）一般被称为肯定前件推理（也称为 MP 推理）；推理（iv）一般被称为否定后件推理（也称为 MT 推理）。

条件引入推理的例子如下：

（1）$2+2=4$。所以，如果太阳从西方升起，那么 $2+2=4$。

（2）$2+2\neq5$。所以，如果 $2+2=5$，那么太阳从西方升起。

条件消去推理的例子如下：

（3）如果 $a>2$，那么 $a^2>4$。$a>2$。所以，$a^2>4$。

（4）如果 $a>2$，那么 $a^2>4$。$a^2\leqslant4$。所以，$a\leqslant2$。

（五）等值命题及其推理

等值命题的基本形式是 $A \leftrightarrow B$。根据等值词的真值表，$A \leftrightarrow B$ 是真的当且仅当 A 和 B 都是真的或者 A 和 B 都是假的。由此可得如下四条：

（1）假定 A 和 B 都是真的。那么 $A \leftrightarrow B$ 是真的。

（2）假定 A 和 B 都是假的。那么 $A \leftrightarrow B$ 是真的。

（3）假定 $A \leftrightarrow B$ 是真的并且 A 是真的。那么 B 是真的。

（4）假定 $A \leftrightarrow B$ 是真的并且 B 是真的。那么 A 是真的。

根据有效推理的涵义，可得如下两种关于等值命题的有效推理形式：

（1）等值引入推理：A，$B \vdash A \leftrightarrow B$；$\neg A$，$\neg B \vdash A \leftrightarrow B$

（2）等值消去推理：$A \leftrightarrow B$，$A \vdash B$；$A \leftrightarrow B$，$B \vdash A$

等值引入推理有两条：从 A 和 B 两个前提推出 $A \leftrightarrow B$，从$\neg A$ 和$\neg B$ 两个前提

推出 $A\leftrightarrow B$。等值消去推理也有两条：从 $A\leftrightarrow B$ 和 A 可以推出 B，从 $A\leftrightarrow B$ 和 B 可以推出 A。

等值引入推理的例子如下：

（1）三角形 ABC 是等边三角形。三角形 ABC 是等角三角形。所以，三角形 ABC 是等边三角形当且仅当它是等角三角形。

（2）三角形 ABC 不是等边三角形。三角形 ABC 不是等角三角形。所以，三角形 ABC 是等边三角形当且仅当它是等角三角形。

等值消去推理的例子如下：

（3）三角形 ABC 是等边三角形当且仅当它是等角三角形。三角形 ABC 是等边三角形。所以，三角形 ABC 是等角三角形。

（4）三角形 ABC 是等边三角形当且仅当它是等角三角形。三角形 ABC 是等角三角形。所以，三角形 ABC 是等边三角形。

三、复合命题的逻辑等值推理

我们再引入另一个概念：逻辑等值。如果 $A\vdash B$ 并且 $B\vdash A$，那么称两个命题 A 和 B 是逻辑等值的（记号：$A\dashv\vdash B$）。因此，两个命题 A 和 B 是逻辑等值的当且仅当如下两条成立：如果 A 是真的，那么 B 是真的；如果 B 是真的，那么 A 是真的。根据关于否定命题的推理可得：

（1）$A \dashv\vdash \neg\neg A$（双重否定律）

（2）$\neg(A\wedge B) \dashv\vdash \neg A\vee\neg B$；$\neg(A\vee B) \dashv\vdash \neg A\wedge\neg B$（德·摩根律）

（3）$\neg(A\rightarrow B) \dashv\vdash A\wedge\neg B$

（4）$\neg(A\leftrightarrow B) \dashv\vdash (A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)$

上述四条规律是关于否定词与其他联结词相互作用的逻辑规律，左右两边的命题是可以相互推出的，因为如下四条成立：

（1^*）A 是真的当且仅当 $\neg\neg A$ 是真的。

（2^*）$A\wedge B$ 是假的当且仅当 A 是假的或者 B 是假的。$A\vee B$ 是假的当且仅当 A 是假的并且 B 是假的。

（3^*）$A\rightarrow B$ 是假的当且仅当 A 是真的并且 B 是假的。

（4*） $A \leftrightarrow B$ 是假的当且仅当 A 是真的并且 B 是假的，或者 A 是假的并且 B 是真的。

除了上述逻辑等值推理以外，命题逻辑中还有许多正确的逻辑推理形式，例如：

（5） $A \wedge B \dashv\vdash B \wedge A$（$\wedge$交换律）；$A \vee B \dashv\vdash B \vee A$（$\vee$交换律）

（6） $A \wedge (B \wedge C) \dashv\vdash (A \wedge B) \wedge C$（$\wedge$结合律）

$A \vee (B \vee C) \dashv\vdash (A \vee B) \vee C$（$\vee$结合律）

（7） $A \wedge (B \vee C) \dashv\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$（$\wedge$对$\vee$分配律）

$A \vee (B \wedge C) \dashv\vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$（$\vee$对$\wedge$分配律）

（8） $A \wedge A \dashv\vdash A$（$\wedge$幂等律）；$A \vee A \dashv\vdash A$（$\vee$幂等律）

（9） $A \wedge B \dashv\vdash \neg(\neg A \vee \neg B)$；$A \vee B \dashv\vdash \neg(\neg A \wedge \neg B)$

（10） $A \rightarrow B \dashv\vdash \neg A \vee B$

（11） $A \leftrightarrow B \dashv\vdash (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$；$A \leftrightarrow B \dashv\vdash B \leftrightarrow A$

$A \leftrightarrow B \dashv\vdash \neg B \leftrightarrow \neg A$

（12） $A \rightarrow B \dashv\vdash \neg B \rightarrow \neg A$（假言易位律）

四、复合命题推理的综合运用

复合命题的推理模式还有一些综合运用的重要例子。下面我们介绍几个重要的推理形式。

（一） 条件三段论

条件三段论是关于三个条件句之间的推理关系，它的形式如下：

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$

这种推理形式是有效的：假设 $A \rightarrow B$ 和 $B \rightarrow C$ 都是真的。为了证明$A \rightarrow C$ 是真的，假设 A 是真的。根据假设 $A \rightarrow B$ 是真的，可得 B 是真的。再根据假设 $B \rightarrow C$ 是真的，可得 C 是真的。所以 $A \rightarrow C$ 是真的。这条规律也称为条件传递律。

（二） 分情况推理

分情况推理又称为二难推理。它的基本形式如下：

$$A \vee B,\ A \rightarrow C,\ B \rightarrow C \vdash C$$

从直观上说，这条推理形式的意思是：有 A 和 B 两种情况。如果情况 A 真，那么可以得到 C 真。如果情况 B 真，那么也可以得到 C 真。因此，可以证明结论 C 是真的。这是数学证明中常用的证明方法。在日常语言的论证中也用到这种方法。

这种推理形式还有一些变形。一种变形是：$A \vee B$，$A \to C$，$B \to D \vdash C \vee D$。这种推理的意思是：有两种情况 A 和 B。如果情况 A 真，则 C 真。如果情况 B 真，则 D 真。所以 C 真或者 D 真。

另一种变形是：$\neg B \vee \neg C$，$A \to B$，$A \to C \vdash \neg A$。这种推理的意思是：有 B 假和 C 假两种情况。如果 A 真，则 B 真。如果 A 真，则 C 真。所以结论是 A 假。

还有一种变形比较复杂一些：$\neg C \vee \neg D$，$A \to C$，$B \to D \vdash \neg A \vee \neg B$。这种推理的意思是：有 C 假和 D 假两种情况。如果 A 真，则 C 真。如果 B 真，则 D 真。所以结论是 A 假或者 B 假。

（三）反三段论

反三段论是关于三个命题之间的推理，它有如下模式：

$$(A \wedge B) \to C \dashv\vdash (A \wedge \neg C) \to \neg B$$

这种推理形式是有效的:假设$(A \wedge B) \to C$ 是真的。为了证明$(A \wedge \neg C) \to \neg B$ 是真的,假设 $A \wedge \neg C$ 是真的,只要证明 B 是假的。根据 $A \wedge \neg C$ 是真的得到 A 是真的并且 C 是假的。由于$(A \wedge B) \to C$ 是真的并且 C 是假的,所以 $A \wedge B$ 是假的。又因为 A 是真的,所以 B 是假的。另一种情况类似可证。

（四）反证法

反证法是数学中常用的证明方法。它的意思是：为了证明结论 A，首先假定 A 是假的，然后得出一对矛盾命题 B 和$\neg B$。因此假设不成立，即 A 是真的。这种推理形式用符号表示如下：

$$\neg A \to B,\ \neg A \to \neg B \vdash A$$

从$\neg A$ 得到矛盾 B 和$\neg B$，所以结论是 A 成立。

（五）归谬法

归谬法与反证法类似，但是稍有不同。从命题 A 出发，如果得出矛盾命题 B 和$\neg B$，那么就能得到结论 A 是假的。这种推理形式用符号表示如下：

$$A \to B,\ A \to \neg B \vdash \neg A$$

从 A 得到矛盾 B 和$\neg B$，所以结论是$\neg A$ 成立。

第三节　真值表方法

我们在第二节引入了联结词的真值表。本节我们继续引入任何命题的真值表。给定任何命题 A，假设其中出现 n 个简单命题。那么简单命题真假情况组合就有 2^n种。在每种情况下，我们可以计算出整个命题的真值。由此得出命题的

真值表。

例 1 命题 $A=((p\to q)\wedge p)\to q$ 的真值表如下：

p	q	$p\to q$	$(p\to q)\wedge p$	A
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

给出命题的真值表的步骤如下：(1) 列出该命题所包含的简单命题的所有真值组合情况。(2) 根据命题联结词的真值表，计算由简单命题组成的较为复杂的命题的真值。在上述例子中，需要计算前件 $(p\to q)\wedge p$ 的真值，再计算整个公式的真值。为了计算前件的真值，首先就要计算其中的命题 $p\to q$ 的真值。(3) 根据命题联结词真值表，计算整个公式的真值。

例 2 命题 $B=(\neg(p\to r)\wedge(q\to\neg p))\wedge(\neg q\to\neg p)$ 的真值表如下：

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$p\to r$	$\neg(p\to r)$	$q\to\neg p$	$\neg q\to\neg p$	B
T	T	T	F	F	T	F	F	T	F
T	T	F	F	F	F	T	F	T	F
T	F	T	F	T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	T	F	T	F	T	T	F
F	T	F	T	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	F	T	T	F
F	F	F	T	T	T	F	T	T	F

例 3 命题 $C=p\to(p\wedge q)$ 的真值表如下：

p	q	$p\wedge q$	C
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

上述三个例子呈现出不同的特点：命题 A 在所有情况下都是真的，命题 B 在所有情况下都是假的，命题 C 在有些情况下是真的而在有些情况下是假的。我们把所有命题分为三类：重言式、矛盾式、或然式。

重言式是在所有情况下都真的命题。在重言式的真值表中，例如上面命题 A 的真值表，每一行都是真的。矛盾式是在所有情况下都假的命题。在矛盾式的真值表中，例如上面命题 B 的真值表，每一行都是假的。或然式是在有些情况下真、在有些情况下假的命题。在或然式的真值表中，例如上面命题 C 的真值表，第二行是假的，其他三行是真的。

运用命题的真值表方法可以判定一个命题是否是重言式。进一步来说，利用重言式的判定方法，可以判定命题逻辑中推理的有效性。假设我们从 n 个前提 B_1，…,B_n推出结论 A。那么如下成立：

$B_1,\cdots,B_n\vdash A$ 是有效推理当且仅当命题 $B_1\wedge\cdots\wedge B_n\to A$ 是重言式。

理由如下:假设 $B_1,\cdots,B_n\vdash A$ 是有效推理。那么在任何情况下,如果 $B_1,\cdots,B_n$ 都是真的,那么 A 是真的。假设 $B_1\wedge\cdots\wedge B_n$是真的。那么 A 是真的。所以 $B_1\wedge\cdots\wedge B_n\to A$ 是真的。所以 $B_1\wedge\cdots\wedge B_n\to A$ 是重言式。反之,假设 $B_1\wedge\cdots\wedge B_n\to A$ 是重言式。在任何情况下,假定 $B_1,\cdots,B_n$都是真的。那么 $B_1\wedge\cdots\wedge B_n$是真的。所以 A 是真的。因此,$B_1,\cdots,B_n\vdash A$ 是有效推理。

因此,要判断一个推理 $B_1,\cdots,B_n\vdash A$ 是否有效,只需要利用命题的真值表判断 $B_1\wedge\cdots\wedge B_n\to A$ 是否为重言式。这样，对命题逻辑推理有效性的检验就可以简化为对蕴涵式是否为重言式的验证。如果它为重言式，则推理是有效的，否则就是无效的。

例 4 推理 $p\to q$，$p\vdash q$ 是有效的。只要证明 $((p\to q)\wedge p)\to q$ 是重言式。根据上述例 1 可知，该命题是重言式。所以该推理有效。

对于自然语言中使用的推理，我们可以尝试首先将它的推理形式写出来，然后利用重言式判定方法来判定它是否有效。

例 5 猪八戒说他要去西天取经。如果猪八戒言行一致，并且既然他说他去西天取经，那么他就不会要回高老庄。但是猪八戒要回高老庄。所以，猪八戒不是言行一致的。

p：猪八戒说他要去西天取经。

q：猪八戒言行一致。

r：猪八戒要回高老庄。

上述推理形式为：p，$(q\wedge p)\to\neg r$，$r\vdash\neg q$

令 $A=(q\wedge p)\to\neg r$，$B=p\wedge A$，$C=B\wedge r$。只需要考虑命题 $C\to\neg q$ 的真值表：

p	q	r	¬r	¬q	q∧p	A	B	C	C→¬q
T	T	T	F	F	T	F	F	F	T
T	T	F	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	F	F	T	F	F	T
F	F	T	F	T	F	T	F	F	T
F	F	F	T	T	F	T	F	F	T

真值表最后一列都真，所以命题 C→¬q 是重言式，因此上述推理是有效的。

下面我们再看一个无效推理的例子。

例 6 如果王林是我们班的数学老师，那么我们班的数学成绩会好。王林不是我们班的数学老师，所以，我们班的数学成绩不会好。

p：王林是我们班的数学老师。

q：我们班的数学成绩会好。

上述推理形式为：p→q，¬p ⊢¬q

令 A=(p→q)∧¬p →¬q。只需要考虑命题 A 的真值表。

p	q	¬p	¬q	p→q	(p→q)∧¬p	A
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T

真值表最后一列中，第三行是假。因此，命题 A 只是或然式，而不是重言式。所以上述推理是无效推理。

如果对复合命题推理是否有效都这样列出真值表予以判定，尽管可靠，但不简便，尤其对于复杂公式更不方便。因此，人们运用简化真值表方法（即“归谬赋值法”）判定一个命题是否为重言式，进而判定推理是否有效。简化真值表方法的思路是：假设所考虑的命题是假的。如果从中不可避免地得出矛盾，那么假设不成立，原命题不可能是假的，也就是说原命题是重言式。如果无法得出矛盾，那么原命题就不是重言式。

以（$(p\vee q)\wedge\neg p$）$\rightarrow q$ 为例来说明简化真值表的运用。第一步首先假定整个命题是假的。第二步，根据命题联结词的真值表可知，前件 $(p\vee q)\wedge\neg p$ 是真的，而后件 q 是假的。第三步，根据前件真可知，两个合取支 $p\vee q$ 和 $\neg p$ 都是真的。因此，第四步得到 p 是假的而 q 是真的，这与 q 是假的相矛盾。总之，假设整个命题为假时，必定得出矛盾。所以该命题为重言式。相应地，从前提“$p\vee q$”和“$\neg p$”推出结论“q”的推理也是有效的。这种方法简化了真值表。

我们再举一个例子：利用简化真值表方法判定命题（$(p\rightarrow q)\wedge(r\rightarrow q)\wedge(p\vee r)$）$\rightarrow q$ 是否是重言式。第一步假定整个公式是假的。第二步得到前件中三个合取支都是真的，而结论 q 是假的。第三步，首先因为 q 假，而前件中前两个合取支是真的，所以 p 是假的并且 r 是假的。因为前件中第三个合取支是真的，而 r 是假的，所以 p 是真的，矛盾。所以，该命题是重言式。相应地，从三个前提“$p\rightarrow q$”“$r\rightarrow q$”和“$p\vee r$”推出结论“q”的推理是有效的。

在命题逻辑中，真值表具有特殊地位，起着重要的作用。总结前面讨论的内容，完全可以明白这一点。可以说，真值表是学习、理解与掌握命题逻辑的钥匙。具体来说，真值表有以下主要作用。

（1）定义作用。命题逻辑中的许多概念必须通过真值表予以定义，以明确其涵义。例如，对几个逻辑联结词 $\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$、$\neg$ 的定义，对重言式、重言等值式、矛盾式、或然式等的定义，都是用真值表进行的。

（2）判定作用。一是判定复合命题之间是否等值，例如，运用真值表可以判定 $p\rightarrow\neg q$ 与 $\neg p\vee\neg q$ 等值，而 $\neg p\rightarrow q$ 与 $\neg p\vee q$ 不等值。二是判定复合命题推理是否有效。如 $q\rightarrow p$，$\neg q\vdash\neg p$，运用真值表很快判定它是无效推理，因为其逻辑等值的命题（$(q\rightarrow p)\wedge\neg q$）$\rightarrow\neg p$ 是或然式而非重言式。三是判定复合命题的逻辑等值推理是否有效，例如，$A\rightarrow B\dashv\vdash\neg A\vee B$，其逻辑等值的命题为 $(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\neg A\vee B)$，运用真值表可以判定该推理是有效的。

通过真值表可以总结复合命题推理的规则及其正确推理形式。例如，从真值表可知，当 $p\rightarrow q$ 真并且 p 真时，q 必定为真，所以充分条件假言推理通过肯定前件可以肯定后件，相应地有肯定前件式；当 $p\rightarrow q$ 真而 q 假时，前件 p 必定为假，所以，充分条件假言推理可以通过否定后件而否定前件，相应地有否定后件式。当 $p\rightarrow q$ 真而 p 假时，q 有真有假，所以，充分条件假言推理不能通过否定前件而否定后件，因此否定前件式是无效推理；当 $p\rightarrow q$ 真而 q 真时，p 有真有假，所以，充分条件假言推理不能通过肯定后件而肯定前件，因此肯定后件式是无效推理。

既然真值表地位特殊、作用显著，那么对它烂熟于心是十分必要的。熟记它的巧妙方法是：“记少不记多”，也就是记住联结词真值表“假”的情况。这有两方面好处。一是“假”的情况总体上比“真”的少，容易记住真值表；二是记住

它以后，对否定命题的等值命题就深刻理解并牢记了。例如，$p \to q$ 假，就是说$\neg(p \to q)$。从真值表看出，只有 p 真而 q 假时 $p \to q$ 才假，因此，$p \land \neg q$ 就是与$\neg(p \to q)$等值的命题。

本章小结

本章主要介绍了使用否定、合取、析取、蕴涵和等值五个命题联结词的命题逻辑推理。命题联结词的意义是通过真值表来解释的。使用五个命题联结词的逻辑推理规则的有效性也可以通过真值表来解释。真值表是命题逻辑的核心，也是检验命题逻辑推理的有效手段，在命题逻辑中具有特殊地位和显著作用。因此，学习真值表方法是掌握命题逻辑推理的钥匙。

思考题：

1. 什么是复合命题？有几种基本的复合命题形式？
2. 各种形式的复合命题具有什么样的逻辑性质？
3. 复合命题的推理有哪些？
4. 真值表有哪些作用？

练习题：

1. 首先指出下列命题中所包含的简单命题，然后使用符号表示它们，并且指出其中的主联结词，给出它们的真值表。

(1) 高水平的舞蹈演员不怕吃苦，而且还有常人不具备的毅力。

(2) 学术造诣高的人，学习刻苦，或者学习方法好且有名师指点。

(3) 如果逻辑学使人更聪明，那么人人都应认真学习逻辑学。

(4) 只有理解自然语言，才能对自然语言提出有深度的问题。

(5) 张三能推出答案当且仅当他具有推理能力。

2. 判定下列每组命题中两个命题之间是否逻辑等值。

(1) $A \to \neg B$ 和 $\neg B \lor \neg A$

(2) $B \land A \to \neg C$ 和 $\neg A \lor \neg B \to C$

(3) $\neg A \lor \neg B \to \neg\neg\neg C$ 和 $C \to A \land B$

(4) $\neg(A \lor (C \to B))$ 和 $\neg A \land C \land \neg B$

3. 请用简化真值表方法判定以下命题是否为重言式。

(1) $((p\to q)\wedge(r\to s))\vee(p\vee r)\to q\vee s$

(2) $((p\to q)\wedge(r\to s))\vee(\neg q\vee\neg s)\to\neg p\vee\neg r$

(3) $((p\to q)\wedge(r\to s))\wedge(p\wedge r)\to q\wedge s$

(4) $(f\vee g\to(q\to(i\leftrightarrow k)))\wedge(q\wedge i)\wedge(q\vee m\to f)\to(i\leftrightarrow k)$

(5) $(p\wedge(q\vee j))\wedge(p\to(q\to k\wedge t))\wedge(p\wedge j\to\neg(k\vee t))\to(k\wedge t)\vee(\neg k\wedge\neg t)$

4. 命题“如果商品价廉并且物美，那么商品畅销”与下列哪些命题是逻辑等值的：

(1) 如果商品不畅销，那么价不廉并且物不美。

(2) 如果商品不畅销，那么价不廉或者物不美。

(3) 如果商品价廉，那么如果它物美就会畅销。

(4) 如果商品价廉，那么或者它物美或者它不会畅销。

5. 考虑如下推理：某地发生一起凶杀案。经过分析，凶手是两人合谋。初步确定 a、b、c、d、e 五人是嫌疑犯。警方掌握了以下情况：

(1) a 和 d 两人中至少有一人是凶手。

(2) 如果 d 是凶手，那么 e 也是凶手。

(3) 如果 b 是凶手，那么 c 是凶手。

(4) 如果 b 不是凶手，那么 a 也不可能是凶手。

(5) c 不是凶手。

根据以上情况，警方推断 d 和 e 是凶手。请写出警方推理的形式，并且利用简化真值表方法判断该推理是否有效。